

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=3$, $\angle ABC=30^\circ$, 现以 BC 为旋转轴旋转 360° 得到一个旋转体, 则该旋转体的内切球的体积为

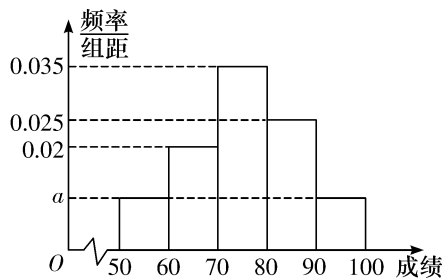
- A. $\frac{27\sqrt{3}\pi}{16}$ B. $\frac{27\sqrt{3}\pi}{48}$ C. $\frac{27\pi}{16}$ D. $\frac{27\pi}{48}$

8. 已知点 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ 的左、右焦点, 点 M 在直线 $l: x = -a$ 上运动, 若 $\angle F_1MF_2$ 的最大值为 60° , 则椭圆 C 的标准方程是

- A. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ C. $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{3} = 1$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 为迎接党的二十大胜利召开, 某中学举行党史知识竞赛, 对全校参赛的 1000 名学生的得分情况进行了统计, 把得分数据按照 $[50, 60)$ 、 $[60, 70)$ 、 $[70, 80)$ 、 $[80, 90)$ 、 $[90, 100]$ 分成 5 组, 绘制了如图所示的频率分布直方图, 根据图中信息, 下列说法正确的是

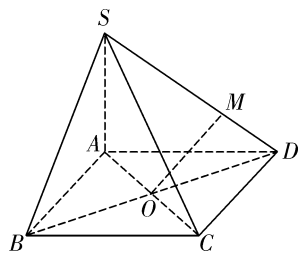


- A. $a=0.01$
 B. 得分在区间 $[60, 70)$ 内的学生人数为 200
 C. 该校学生党史知识竞赛成绩的中位数大于 80
 D. 估计该校学生党史知识竞赛成绩的平均数落在区间 $[70, 80)$ 内

10. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, 下列结论正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π
 B. 函数 $f(x)$ 的图象的一个对称中心为 $\left(\frac{5\pi}{8}, 0\right)$
 C. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{3\pi}{8}\right)$ 上单调递增
 D. 函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位后得到的是一个偶函数的图象

11. 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $SA \perp$ 底面 $ABCD$, $SA=AB$, AC, BD 交于点 O , M 是棱 SD 上的动点, 则



- A. 存在点 M , 使 $OM \parallel$ 平面 SBC
 B. 三棱锥 $S-ACM$ 体积的最大值为 $\frac{4}{3}$
 C. 点 M 到平面 $ABCD$ 的距离与点 M 到平面 SAB 的距离之和为定值
 D. 存在点 M , 使直线 OM 与 AB 所成的角为 30°

12. 已知函数 $y=f(x)$ 为奇函数, 且对定义域内的任意 x 都有 $f(x)+f(2-x)=0$. 当 $x \in (0,1)$ 时, $f(x)=\log_2(2-x)-1$. 则下列结论正确的是
- A. 当 $x \in (1,2)$ 时, $f(x)=1-\log_2 x$
- B. 函数 $y=|f(x)|$ 是以 2 为周期的周期函数
- C. 函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(k,0)$ ($k \in \mathbf{Z}$) 成中心对称
- D. 函数 $y=f(|x|)$ 在 $(k,k+1)$ ($k \in \mathbf{Z}$) 上单调递减

选择题答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答案													

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 \mathbf{a}, \mathbf{b} 为单位向量. 若 $|\mathbf{a}-\sqrt{2}\mathbf{b}|=1$, 则 \mathbf{a} 在 \mathbf{b} 上的投影向量为 _____.
14. 写出过点 $A(1,2)$, 且横、纵截距的绝对值相等的一条直线方程 _____.
15. 若 $\frac{2\sin^2\alpha-1}{1+\sin 2\alpha}=2$, 则 $\tan 2\alpha=$ _____.
16. 已知直线 $l: x-2y+1=0$ 与抛物线 $C: y^2=4x$ 相交于点 A, B , 与 x 轴相交于点 D , 若抛物线 C 上存在不同于点 A, B 的一点 N , 满足 $|DB|=|DN|$, 则 $\triangle DAN$ 的面积为 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是内角 A, B, C 的对边. 已知 $a \sin B = b \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right)$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $a=2\sqrt{6}, b+c=6$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = a^x + \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值与最小值之和为 $6 + \log_a 2$.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 对于任意的 $x \in [2, +\infty)$, 不等式 $kf(x) - 1 \geq 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

已知圆 $M: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$ 关于直线 $2ax + by + 6 = 0$ 对称, 记点 $P(a, b)$, 过点 P 的直线与圆 M 相切于点 A, B .

(1) 求 $|PA|$ 的最小值;

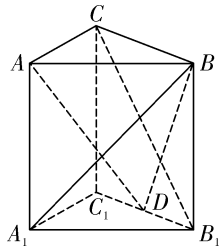
(2) 当 $|PA|$ 取最小值时, 求切点 A, B 所在的直线方程.

20. (本小题满分 12 分)

在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 已知 D 为 B_1C_1 的中点, $A_1B_1 = A_1C_1, A_1B \perp B_1C$.

(1) 证明: $BD \perp B_1C$;

(2) 若底面 ABC 是等腰直角三角形, $\angle BAC = 90^\circ$, 求直线 B_1C 与平面 ABD 所成角的正弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知某著名高校今年综合评价招生分两步进行:第一步是材料初审,若材料初审不合格,则不能进入第二步面试;若材料初审合格,则进入第二步面试.只有面试合格者,才能获得该高校综合评价的录取资格,且材料初审与面试之间相互独立.现有甲、乙、丙三名考生报名参加该高校的综合评价,假设甲、乙、丙三名考生材料初审合格的概率分别是 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$;面试合格的概率分别是 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

- (1)求甲、乙两位考生中有且只有一位考生获得该高校综合评价录取资格的概率;
- (2)求三人中至少有一人获得该高校综合评价录取资格的概率;
- (3)求甲、乙、丙三名考生获得该高校综合评价录取资格的人数为 1 人或 2 人的概率.

22. (本小题满分 13 分)

已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 下顶点为 B .

- (1) 设点 E 为椭圆 Γ 上位于第一象限内一动点, 直线 EB 与 x 轴交于点 C , 直线 EA_1 与 y 轴交于点 D , 求四边形 A_1BCD 的面积;
- (2) 设直线 l 与椭圆 Γ 交于不同于右顶点 A_2 的 M, N 两点, 且 $A_2M \perp A_2N$, 求 $|A_2M| \cdot |A_2N|$ 的最大值.